Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Επίκ. Καθ. Γ. Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV
17 Φεβρουαρίου 2014

Θέμα 1. (α΄) Υπολογίστε το εμβαδό του κλειστού κυκλικού δίσκου

$$\overline{B}((0,0),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le r^2\}, \ r > 0,$$

(i) με εφαρμογή του Θεωρήματος Fubini,

(ii) με χρήση πολικών συντεταγμένων,

(iii) με εφαρμογή του Θεωρήματος Green.

(β΄) Υπολογίστε τον όγκο της κλειστής μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^3$

$$\overline{B}((0,0,0),1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$

(i) με εφαρμογή του Θεωρήματος Fubini,

(ii) με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων.

(γ΄) Αν για $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$, $r > 0$ ορίσουμε $\bar{x}_0 + B := \{\bar{x}_0 + \bar{y} : \bar{y} \in B\}$, $rB := \{r\bar{y} : \bar{y} \in B\}$, δείξτε ότι για την κλειστή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ κέντρου $\bar{x}_0$ και ακτίνας r ισχύει

$$\overline{B}(\bar{x}_0, r) = \bar{x}_0 + r\overline{B}(\bar{0}, 1)$$

και υπολογίστε με χρήση του (β') και του Θεωρήματος Αλλαγής Μεταβλητής τον όγκο της μπάλας $\overline{B}((x_0,y_0,z_0),r) \subset \mathbb{R}^3$.

(δ΄) Υπολογίστε το εμβαδό της σφαίρας $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = r^2\}$, $r > 0$, με χρήση του (γ') και του Θεωρήματος Gauss.

(ε΄) Δικαιολογήστε ότι ο όγκος μιας κλειστής μπάλας στον $\mathbb{R}^n$ ισούται με τον όγκο της αντίστοιχης ανοικτής.

(στ΄) Χωράνε 1000 βόλοι διαμέτρου 1 cm

(i) σε μια σφαιρική γυάλα διαμέτρου 10 cm;

(ii) σε ένα κυβικό κουτί ακμής 10 cm;

Θέμα 2. (α΄) Υπολογίστε τον όγκο του $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \le \frac{z}{2}, \ |y| \le \frac{z}{2}, \ z \in [0,1]\}$.

(β΄) Εξετάστε αν το διανυσματικό πεδίο $\bar{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\bar{f}(x,y,z) = \cos(xyz)(yz, xz, xy)$, είναι πεδίο κλίσεων και υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{f}(x,y,z) \cdot d(x,y,z), \ \text{όπου} \ \bar{\gamma}(t) = \left(t\cos t, e^t \sin t, \log\left(1 + \tfrac{1}{2}\sin t\right)\right), \ t \in [0, 2\pi].$$

(γ΄) Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_{\Phi} \frac{1}{\sqrt{1+2z}} \, d\sigma, \ \text{όπου} \ \Phi(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2+v^2}{2}\right), \ (u,v) \in \overline{B}((0,0),r), \ r > 0.$$

(δ΄) Για Φ όπως στο (γ') και $\bar{\alpha}(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0,2\pi]$, υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\Phi\circ\bar{\alpha}} (-y, x, x^2+y^2) \cdot d(x,y,z)$$

με χρήση (i) του ορισμού, (ii) του Θεωρήματος Stokes.

Θέμα 3. Δείξτε ότι η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, την οποία και να βρείτε, και ότι η ισότητα $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ ισχύει *μόνο* για κάθε $x \neq 0$. Συγκλίνει η (f_n') ομοιόμορφα; Κατά σημείο;

Θέμα 4. Έστω $0 < \delta < \pi$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική με $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |x| \le \delta, \\ 0, & \text{αν } \delta < |x| \le \pi. \end{cases}$

Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi-\delta}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta} = \frac{\pi-\delta}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Λαμβάνονται υπόψη μόνο δικαιολογημένες απαντήσεις! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!